ЛЕКЦИЯ 1

Двойные интегралы. *Определение двойного интеграла и его свойства. Повторные интегралы. Сведение двойных интегралов к повторным. Расстановка пределов интегрирования. Вычисление двойных интегралов в декартовой системе координат.*

1. ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1.1. Определение двойного интеграла

Двойной интеграл представляет собой обобщение понятия определенного интеграла на случай функции двух переменных. В этом случае вместо отрезка интегрирования будет присутствовать какая-то плоская фигура.

Пусть D – некоторая замкнутая ограниченная область, а $f(x,y)$ – произвольная функция, определенная и ограниченная в этой области. Будем предполагать, что границы области D состоят из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y=f(x)$ или $x=g(y)$, где $f(x)$ и $g(y)$ – непрерывные функции.

Разобьем область D произвольным образом на n частей. Площадь i-го участка обозначим символом Δs_i. На каждом участке произвольно выберем какую-либо точку P_i, и пусть она в какой-либо фиксированной декартовой системе имеет координаты (x_i,y_i). Составим *интегральную сумму* для функции $f(x,y)$ по области D, для этого найдем значения функции во всех точках P_i, умножим их на площади соответствующих участков Δs_i и просуммируем все полученные результаты:

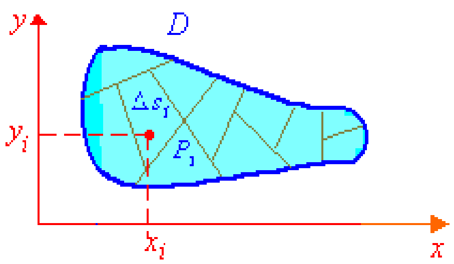


Рис. 1.1

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i . \tag{1.1}$$

Назовем *диаметром* $diam(G)$ области G наибольшее расстояние между граничными точками этой области.

Двойным интегралом *функции $f(x,y)$ по области D называется предел, к которому стремится последовательность интегральных сумм (1.1) при неограниченном увеличении числа разбиений n (при этом $\max\limits_i \operatorname{diam}\Delta s_i \to 0$).* Это записывают следующим образом

$$\iint\limits_D f(x,y)ds = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i . \tag{1.2}$$

Заметим, что, вообще говоря, интегральная сумма для заданной функции и заданной области интегрирования зависит от способа разбиения области D и выбора точек P_i. Однако если двойной интеграл существует, то это означает, что предел соответствующих интегральных сумм уже не зависит от указанных факторов. *Для того чтобы двойной интеграл существовал* (или, как говорят, *чтобы функция $f(x,y)$ была интегрируемой в области D), достаточно чтобы подынтегральная функция была **непрерывной** в заданной области интегрирования*.

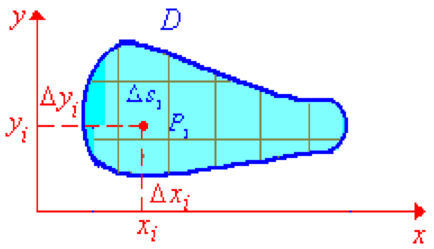


Рис. 1.2

Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D. Поскольку предел соответствующих интегральных сумм для таких функций не зависит от способа разбиения области интегрирования, то разбиение можно производить при помощи вертикальных и горизонтальных линий. Тогда большинство участков области D будет иметь прямоугольный вид, площадь которых равна $\Delta s_i = \Delta x_i \Delta y_i$. Поэтому дифференциал площади можно записать в виде $ds = dxdy$. Следовательно, *в декартовой системе координат двойные интегралы* можно записывать в виде

$$\iint_D f(x,y)dxdy. \tag{1.3}$$

Замечание. *Если подынтегральная функция $f(x,y) \equiv 1$, то двойной интеграл будет равен площади области интегрирования:*

$$S_D = \iint_D ds. \tag{1.4}$$

Отметим, что двойные интегралы обладают такими же свойствами, что и определенные интегралы. Отметим некоторые из них.

Свойства двойных интегралов.

1^0. *Линейное свойство.* *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов*:

$$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]ds = \iint_D f_1(x,y)ds + \iint_D f_2(x,y)ds;$$

и постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\iint_D C \cdot f(x,y)ds = C \cdot \iint_D f(x,y)ds.$$

2^0. *Аддитивное свойство.* *Если область интегрирования D разбить на две части, то двойной интеграл будет равен сумме интегралов по каждой этой части*:

$$\iint_D f(x,y)ds = \iint_{D_1} f(x,y)ds + \iint_{D_2} f(x,y)ds.$$

3^0. *Теорема о среднем.* *Если функция* f(x,y) *непрерывна в области D, то в этой области найдется такая точка* (ξ,η), *что*:

$$\iint_D f(x,y)ds = f(\xi,\eta)\, S_D.$$

Далее возникает вопрос: как вычисляются двойные интегралы? Его можно вычислить приближенно, с этой целью это разработаны эффективные методы составления соответствующих интегральных сумм, которые затем вычисляются численно при помощи ЭВМ. При аналитическом вычислении двойных интегралов их сводят к двум определенным интегралам.

1.2. Повторные интегралы

Повторными интегралами называются интегралы вида

$$\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx. \qquad (1.5)$$

В этом выражении сначала вычисляется внутренний интеграл, т.е. производится сначала интегрирование по переменной y (при этом переменная x считается постоянной величиной). В результате интегрирования по y получится некоторая функция по x:

$$\Phi(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Затем полученную функцию интегрируют по x:

$$\int_a^b \Phi(x)dx.$$

Пример 1.1. Вычислить интегралы:

$$\text{а)} \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy, \qquad \text{б)} \int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dx.$$

Решение. а) Произведем интегрирование по y, считая, что переменная $x=const$. После этого вычисляем интеграл по x:

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)dy = \int_0^1 dx \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right)\Bigg|_0^{x^2} = \int_0^1 \left[x^2 x^2 + \frac{1}{3}(x^2)^3 \right] dx =$$

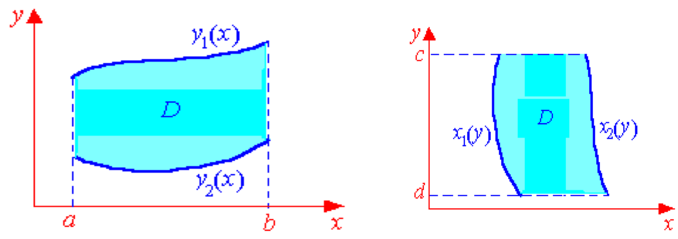
$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{1}{3} x^5 \right) dx = \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{21} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105}.$$

б) Так как во внутреннем интеграле интегрирование производится по переменной x, то y^3 можно вынести во внешний интеграл как постоянный множитель. Поскольку y^2 во внутреннем интеграле считается постоянной величиной, то этот интеграл будет табличным. Производя последовательно интегрирование по y и x, получаем

$$\int_2^4 dy \int_0^y \frac{y^3}{x^2 + y^2} dy = \int_2^4 y^3 dy \int_0^y \frac{dx}{x^2 + y^2} = \int_2^4 y^3 dy \left(\frac{1}{y} \cdot arctg \frac{x}{y} \right)\Bigg|_0^y =$$

$$= \int_2^4 y^2 (arctg 1 - arctg 0)dy = \frac{\pi}{4} \int_2^4 y^2 dy = \frac{\pi}{4} \frac{y^3}{3}\Bigg|_2^4 = \frac{14}{3}\pi.$$

Между двойными и повторными интегралами существует взаимосвязь, но сначала рассмотрим простые и сложные области. Область называется *простой* в каком-либо направлении, если любая прямая, проведенная в этом направлении, пересекает границу области не более чем в двух точках. В декартовой системе координат обычно рассматривают направления вдоль осей Оx и Оy. Если область является простой в обоих направлениях, то говорят



а ***б***

Рис. 1.4

коротко – простая область, без выделения направления. Если область не является простой, то говорят, что она *сложная*.

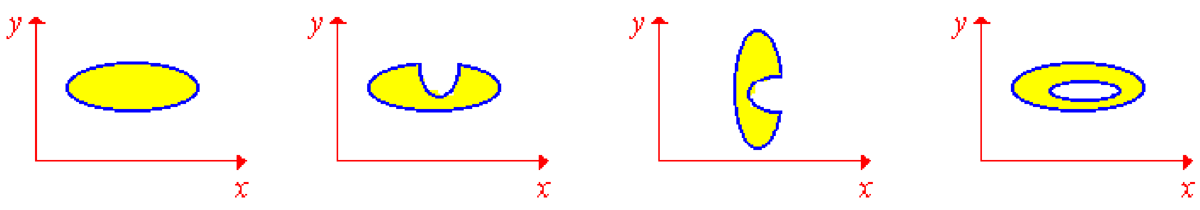
Любую сложную область можно представить в виде суммы простых областей. Соответственно, любой двойной интеграл можно представить в виде суммы двойных интегралов по простым областям. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать, в основном, только интегралы по простым областям.

Теорема. *Если область интегрирования D – простая в направлении оси Оу (см. рис.1.4а), то двойной интеграл можно записать в виде повторного следующим образом:*

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\,; \qquad (1.6)$$

если область интегрирования D – простая в направлении оси Ох (см. рис.1.4б), то двойной интеграл можно записать в виде повторного следующим образом:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (1.7)$$



простая область *простая область в направлении Оу* *простая область в направлении Ох* *сложная область*

Рис. 1.3

Если область интегрирования является правильной в обоих направлениях, то можно произвольно выбирать вид повторного интеграла, в зависимости от простоты интегрирования.

1.3. РАССТАНОВКА ПРЕДЕЛОВ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.3.1. Прямоугольная область интегрирования

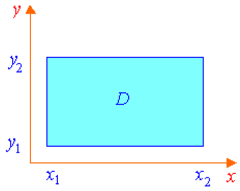


Рис. 1.5

При сведении двойных интегралов к повторным, основная трудность возникает при расстановке пределов во внутренних интегралах. Наиболее просто это сделать для прямоугольных областей (см. рис. 1.5).

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy = \int\limits_{y_1}^{y_2} dy \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx$$

Пример 1.2. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}, \quad \text{где} \quad D:\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Решение. Запишем двойной интеграл в виде повторного:

$$\int\limits_0^1 dx 1 \int\limits_0^{x^2} \frac{dy}{(x+y+1)^3} = \int\limits_0^1 dx \frac{-1}{2(x+y+1)^2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[-\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{6}.$$

1.3.2. Произвольная область интегрирования

Для того, чтобы перейти от двойного интеграла к повторному следует:

1) *построить область интегрирования*;
2) *расставить пределы в интегралах, при этом следует помнить, что пределы внешнего интеграла должны быть постоянными величинами (т.е. числами) независимо от того, по какой переменной вычисляется внешний интеграл.*

Пример 1.3. Расставить пределы интегрирования в соответствующих повторных интегралах для двойного интеграла

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy, \text{ если а) } D:\begin{cases} x=0, & y=x, \\ x=1, & y=2x. \end{cases} \quad \text{б) } D:\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+y=1, \end{cases}$$

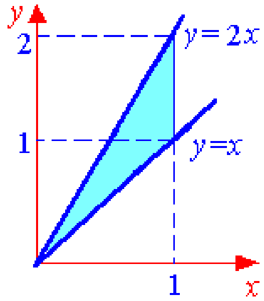


Рис. 1.6

Решение. **а)** Изобразим область интегрирования D (см. рис.1.6). Пусть интегрирование во внешнем интеграле производится по переменной x, а во внутреннем – по y. *Расстановку пределов всегда нужно начинать с внешнего интеграла*, в данном случае с переменной x. Из рисунка видно, что x изменяется от 0 до 1, при этом значения переменной y будут изменяться от значений на прямой $y=x$ до значений на прямой $y=2x$. Таким образом, получаем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy \cdot$$

Пусть теперь интегрирование во внешнем интеграле производится по y, а во внутреннем – по x. В этом случае значения y будут изменяться от 0 до 2. Однако тогда верхняя граница изменений значений переменной x будет состоять из двух участков $x=y/2$ и $x=1$. Это означает, что область интегрирования нужно разбить на две части прямой $y=1$. Тогда в первой области у изменяется от 0 до 1, а x от прямой $x=y/2$ до прямой $x=y$. Во второй области у изменяется от 1 до 2, а x – от прямой $x=y/2$ до прямой $x=1$. В результате получим

$$\iint f(x,y)dxdy = \int^{1} dy \int^{y} f(x,y)dx + \int^{2} dy \int^{1} f(x,y)dx .$$

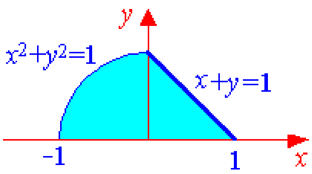


Рис. 1.7

б) Построим область интегрирования D (см. рис.1.7). Пусть во внешнем интеграле интегрирование производится по x, а во внутреннем – по y. В этом случае при изменении x от –1 до 1 изменения переменной y сверху будут ограничены двумя линиями: окружностью и прямой. На отрезке [–1;0] y изменяется от $y=0$ до $y=\sqrt{1-x^2}$; на отрезке [0;1] переменная y изменяется от $y=0$ до $y=1-x$. Таким образом,

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x,y)dy .$$

Пусть теперь во внешнем интеграле интегрирование производится по y, а во внутреннем – по x. В этом случае y будет изменяться от 0 до 1, а переменная x – от дуги окружности $x=-\sqrt{1-y^2}$ до прямой $x=1-y$. В результате получим

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx .$$

Данные примеры показывают, как важно правильно выбирать порядок интегрирования.

Пример 1.4. Изменить порядок интегрирования

а) $\int^{1} dx \int^{x} f(x,y)dy$; б) $\int^{9/16} dy \int^{\sqrt{y}} f(x,y)dx + \int^{3/4} dy \int^{3/4} f(x,y)dx$.

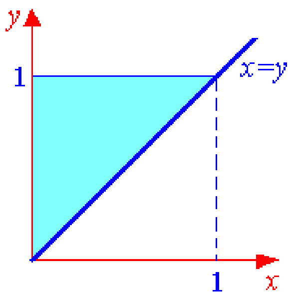


Рис. 1.8

***Решение*. а)** Построим область интегрирования. На отрезке [0;1] для x переменная y изменяется от прямой $y=0$ до прямой $y=x$. В результате получается следующая область интегрирования (см. рис.1.8). На основании построенного рисунка, расставляем пределы интегрирования

$$\int_{0}^{1} dy \int_{y}^{1} f(x,y)dx .$$

б) Построим область интегрирования. На отрезке [0;9/16] для y переменная x изменяется от прямой $x=y$ до параболы $x=\sqrt{y}$; на отрезке [9/16;3/4] – от прямой $x=y$ до прямой $x=3/4$. В результате получается следующая область интегрирования (см. рис.1.9). На основании построенного рисунка, расставляем пределы интегрирования,

$$\int_{0}^{3/4} dx \int_{x}^{x^2} f(x,y)dy .$$